Mechanik 1 - Bewegungsgleichungen

Bewegungsgleichungen

Weg-Zeit-Diagramm

Bewegt sich ein Körper, so legt er in der Zeit t eine bestimmten Weg s zurück. Es kann ein s-t-Diagramm (Weg-Zeit-Diagramm) gezeichnet werden.

Größe		**Einheit**	
Weg	s	Meter	m
Zeit	t	Sekunde	s
Geschwindigkeit	v	Meter pro S.	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Beschleunigung	a	Meter pro S. Quadrat	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

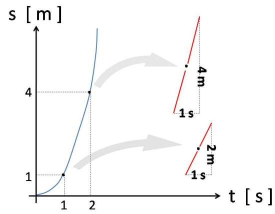

Abbildung 1: Tabelle der Bewegungsgrößen mit Einheiten. Und Weg-Zeit-Diagramm: Nach 1 s hat der Körper 1 m zurückgelegt, nach 2 s schon 4 m. Die Tangente bei $t = 1\,\mathrm{s}$ hat die Steigung $v = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, die Tangente bei $t = 2\,\mathrm{s}$ die Steigung $v = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Legt man an einem bestimmten Punkt die Tangente an, so kann über ein Steigungsdreieck durch Quotientenbildung die Momentan-Geschwindigkeit v ermittelt werden. Tangentenbildung an einem Punkt stellt mathematisch aber die erste Ableitung dar.

Die Geschwindigkeit $\frac{d}{dt}s = v$

Die erste Ableitung nach der Zeit wird formal $\frac{d}{dt}$ geschrieben. Wird der Weg s (Einheit: m) nach der Zeit (Einheit: s) abgeleitet, so erhält man die Geschwindigkeit v (Einheit: $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$).

Die Beschleunigung $\frac{d}{dt}v = a$

Ändert sich die Geschwindigkeit in der Zeit, erhöht z.B ein Auto seine Geschwindigkeit, so beschleunigt es. Ein Gegenstand, der fallen gelassen wird beschleunigt mit grob $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Nach der ersten Sekunde ist er $v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ schnell, nach der zweiten schon $v = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ usf.

Formeln und Konstanten

$$Weggesetz\ 1 \text{ (nur für v=konst)} \qquad s = vt + s_0 \tag{1}$$

$$Weggesetz\ 2 \qquad s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{2}$$

$$Geschwindigkeitsgesetz \qquad v = at + v_0 \tag{3}$$

$$Erdbeschleunigung \qquad g \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{4}$$

Zu Beginn einer Messung stellt fest, wo sich das Objekt befindet, bei s_0 und welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 es bei $t = 0$ hat. Dies nennt man die *Anfangsbedingungen*. Idealerweise -und dies ist in den Aufgaben meist so- ist

$$s_0 = v_0 = 0.$$

Ist es anders, so lautet die Frage etwa: "...ein Teilchen mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 = ... tritt in die Messung ein..."
Beachte das in (2) den Verlauf einer Parabel wiedergibt und rechne nach, dass Gleichung (3) durch Ableitung von (2) nach t entsteht.
Gleichung (1) gilt nur für konstante Geschwindigkeiten, nicht wenn Beschleunigungen auftreten.

Übung: Ein Gegenstand wird aus 10 m Höhe fallengelassen. Wie lange fällt er?

Lösung: $s = \frac{1}{2}at^2$ mit $s = 10\,\mathrm{m}$ und $a \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (a ist die Erdbeschleunigung, sie variiert regional und Höhenabhängig). Als wichtiger Wert wird sie als g bezeichnet.
Gleichung (1) wird so umgestellt, dass alle wertemäßig bekannten Größen rechts stehen:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$t = \sqrt{\frac{20\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \sqrt{2,04\,\mathrm{s}^2} = 1{,}4\,\mathrm{s}$$

Man beachte, dass die Wurzel auch für die Einheiten gilt. Gerundet wird je nach Aufgabenstellung. Es gilt: eher großzügig als mit zu vielen Nachkommastellen.

---

v-t und a-t Diagramme

Man beachte das das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm die Ableitung (also die Steigung) des Geschwindigkeit-Zeit Diagramm darstellt.

Abbildung 2: Links: Zunahme der Geschwindigkeit eines fallenden Körpers und rechts: a-t-Diagramm. Die Beschleunigung hat den festen Wert $9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und ändert sich mit der Zeit nicht.